1) Considerar las matrices $B$ y $M_e$ de $n+1 \times n+1$:

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}, \quad M_e = \begin{pmatrix} I & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix}, \quad b, c, e \in \mathbb{R}^n, \; d \in \mathbb{R}$$

Si A es Δ sup o es diagonal.

Siendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular inversible con filas $a_1^t, a_2^t, \dots, a_n^t$, tal que $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n - \neq c$, para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

a) Probar que A tiene factorización LU.

Si A es Δ inf.

Como A es triangular e inversible, sé que $a_{ii} \neq 0 \;\forall i = 1, \dots, n$. Luego, propongo la siguiente factorización LU:

$A = A \cdot D \cdot D^{-1}$, donde $D$ es una matriz diagonal

t'q' $d_{ii} = \begin{cases} -\frac{1}{a_{ii}} & \text{si } a_{ii} < 0 \\ \frac{1}{a_{ii}} & \text{si } a_{ii} > 0 \end{cases}$

Así $AD$ es Δ inf con 1s en la diagonal y $D^{-1}$ es Δ sup (en particular es diagonal)

$\therefore A = \underbrace{AD}_{L}\,\underbrace{D^{-1}}_{U} = LU$ es una fact. LU de A.

? b) Probar que $\|M_e\|_2 \geq \sqrt{1 + \|e\|_2^2}$

$$\|M_e\|_2 = \max_{x: \|x\|_2 = 1} \|M_e x\|_2 = \max \frac{\|M_e x\|_2}{\|x\|_2}$$

Considero $x = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_e x = \begin{pmatrix} I & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e^t e \end{pmatrix} \quad ; \; x^t x = \sqrt{\|e\|_2^2}$$

$$\Rightarrow \|M x\|_2 = \sqrt{(e^t, e^t e)\begin{pmatrix} e \\ e^t e \end{pmatrix}} = \sqrt{e^t e + (e^t e)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\|e\|_2^2 (1 + \|e\|_2^2)}}{\sqrt{\|e\|_2^2}} = \sqrt{1 + \|e\|_2^2}$$

$\therefore \|M_e\|_2 \geq \sqrt{1 + \|e\|_2^2}$

c) Determinar $\ell \in \mathbb{R}^n$ tal que $M_\ell B = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Dar explícitamente los valores que forman $\ell$.

$$M_\ell B = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & * \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} I & 0 \\ \ell^t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} I.A + 0.c^t = A \checkmark \\ I.b + 0.d = b \checkmark \\ \ell^t A + 1.c^t = 0 \\ \ell^t b + d = * \quad \text{vale siempre} \end{cases}$$

$\ell^t A + c^t = 0 \iff \ell^t A = -c^t$ ; $A$ es inversible

$\iff \ell^t = -c^t A^{-1}$

$\iff \ell_i = -\sum_{j=1}^{n} c_j^t (a_i^{-1})_j^t = -c^t (a_i^{-1})^t$

con $(a_1^{-1})^t, \dots, (a_n^{-1})^t$ las filas de $A^{-1}$

d) Probar que $B$ tiene factorización LU. Hallarla explícitamente en función de $b, c, d$ y $L, U$ de la fact. LU de $A$, y el $\ell$ del ítem anterior.

Sé que $M_\ell B = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & * \end{pmatrix}$, noto que $M_\ell$ es $\Delta$ inf con 1s en la diagonal. Propongo la siguiente fact. LU para $M_\ell B$:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & u \\ 0 & * \end{pmatrix} \iff \begin{cases} LU = A \checkmark \\ Lu = b \quad \text{tiene sol. p/q } L \text{ inv} \\ 0.U + 1.0 = 0 \checkmark \\ 0.u + 1.* = * \checkmark \end{cases}$$

$$\therefore M_\ell B = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & u \\ 0 & * \end{pmatrix} \iff B = \underbrace{M_\ell^{-1}\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_B}\underbrace{\begin{pmatrix} U & u \\ 0 & * \end{pmatrix}}_{U_b}$$

$B = L_B U_B$ es una fact. LU válida de $B$ p/q $M_\ell^{-1}\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $\Delta$ inf con 1s en su diagonal y $U_B$ es $\Delta$ sup.

2) a) Probar que los determinantes de las submatrices ppales de una matriz simétrica definida positiva son positivos.

Sea A sdp, se que A tiene factorización Cholesky $A = LL^t$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^t & L_{21}^t \\ 0 & L_{22}^t \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11}^k = L_{11} L_{11}^t$$

Con $A_{11}^k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ la $k$-ésima submatriz ppal de A $(1 \leq k \leq n)$

$L_{11}$ es $\Delta$ inf con $l_{ii} > 0$ p'q' L es la matriz de la fact. Cholesky de A.

$\therefore \det(A_{11}^k) = \det(L_{11} \cdot L_{11}^t) = \det(L_{11})^2 > 0$

p'q' $\det(L_{11}) = \prod_{i=1}^{k} \underbrace{l_{ii}}_{>0} > 0$

$\therefore$ Los determinantes de las submatrices ppales de una matriz sdp son positivos.

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ una matriz simétrica expresada por bloques en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & u \\ u^t & a \end{pmatrix}, \text{ con } A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n},\ u \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}$$

i) Probar que A es definida positiva $\Leftrightarrow$ $A_1$ es dp y $\det(A) > 0$.

$\Rightarrow$) Se que las submatrices ppales de una matriz sdp son sdp $\therefore A_1$ es dp.

Además sea $A = LL^t$ la descomposición Cholesky de A

$\Rightarrow \det(A) = \det(LL^t) = \underbrace{\det(L)^2}_{>0} > 0$

$\Leftarrow$) Se que A es sdp $\Leftrightarrow$ los determinantes de todas sus submatrices ppales son $> 0$.

$\therefore$ Como $A_1$ es sdp y $\det(A) > 0$, A es sdp.

ii) Probar que si $A$ admite una descomposición de Cholesky $A = LL^t$ con $L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ v^t & b \end{pmatrix}$, donde $L_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $\det(A) = b^2 \cdot \det(A_1) \leq a \cdot \det(A_1)$

$$A = LL^t \Rightarrow \det(A) = \det(LL^t) = \det(L) \cdot \det(L^t)$$

$$;\ \det\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ v^t & b \end{pmatrix} = b \cdot \det(L_1)$$

$$;\ \det\begin{pmatrix} L_1^t & v \\ 0^t & b \end{pmatrix} = \det(L_1^t) \cdot b$$

$$\Rightarrow \det(A) = b \cdot \det(L_1) \cdot \det(L_1^t) \cdot b$$

$$= b^2 \cdot \det(L_1 L_1^t) = b^2 \cdot \det(A_1)$$

$$\therefore \boxed{\det(A) = b^2 \cdot \det(A_1)}$$

$$b^2 \cdot \underbrace{\cancel{\det(A_1)}}_{>0} \leq a \cdot \cancel{\det(A_1)} \Leftrightarrow b^2 \leq a$$

$$A = LL^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & u \\ u^t & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ v^t & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^t & v \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 L_1^t = A_1 \\ L_1 v = u \longrightarrow v = L_1^{-1} u \quad (L_1 \text{ inversible}) \\ v^t L_1^t = u^t \\ v^t v + b^2 = a \Leftrightarrow (u^t {L_1^{-1}}^t)(L_1^{-1} u) + b^2 = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|L^{-1} u\|_2^2}_{\geq 0} + b^2 = a$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a - \|L^{-1} u\|_2 \quad \therefore \quad b^2 \leq a$$

3) a) Sean $V, W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices inversibles tal que $V^t V = W^t W$. Probar que $WV^{-1}$ es ortogonal.

qvq $(WV^{-1})^t (WV^{-1}) = I$:

$$(WV^{-1})^t (WV^{-1}) = (V^{-1})^t W^t W V^{-1}$$

$$= (V^{-1})^t V^t \underbrace{V V^{-1}}_{= I} = (V^t)^{-1} V^t = I$$

$\therefore WV^{-1}$ es ortogonal

b) Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_n\}$ dos conjuntos l.i de vectores en $\mathbb{R}^n$. Probar que $v_i^t v_j = w_i^t w_j$ $\forall\, i, j = 1, \dots, n$ sii existe una matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $w_i = Q v_i$ $\forall\, i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$) Se que $v_i^t v_j = w_i^t w_j$ $\forall\, i, j = 1, \dots, n$

Defino las matrices:

$$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{pmatrix},$$

$V$ y $W$ son inversibles p/q sus columnas son l.i

$$V^t V = \begin{pmatrix} — & v_1^t & — \\ & \vdots & \\ — & v_n^t & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^t v_1 & v_1^t v_2 & \cdots & v_1^t v_n \\ \vdots & & & \\ v_n^t v_1 & \cdots & \cdots & v_n^t v_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_1^t w_1 & \cdots & w_1^t w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^t w_1 & \cdots & w_n^t w_n \end{pmatrix} = W^t W$$

(porque $(V^tV)_{ij} = v_i^t v_j \underset{\text{enunciado}}{=} w_i^t w_j = (W^tW)_{ij}$ $\forall i,j$)

$\therefore WV^{-1}$ es ortogonal (x item (a))

Considero $WV^{-1} v_i$:

Se que $V e_i = v_i \overset{V \text{ inv.}}{\iff} e_i = V^{-1} v_i$

$\therefore \left[ WV^{-1} v_i = W e_i = w_i \right]$ como quería ver

$\Leftarrow$) Sea $Q$ ortogonal t.q. $w_i = Q v_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow w_i^t w_j = (Q v_i)^t Q v_j = v_i^t \underbrace{Q^t Q}_{= I} v_j = v_i^t v_j$

$\forall\, i, j = 1, \dots, n$

c) Sea $Q$ una matriz tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n : Q\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$

i_ Probar que $Q$ es ortogonal.

Considero los vectores canónicos:

$$Q e_1 = Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = q_1 \text{ 1er columna de } Q$$

$$Q e_2 = Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q_2, \text{ 2da columna de } Q$$

$\vdots$

$$Q e_n = Q\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = q_n, \text{ n-ésima columna de } Q$$

$\therefore Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de permutación y por lo tanto es ortogonal.

ii_ Para $n=2$, ¿Es $Q$ una matriz de Givens o de Householder?

$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es de Givens p'q' no existe ángulo $\theta$ t'q' $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

. Para ver si es de Householder, qvq $\exists u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|_2 = 1$ t'q' $Q = I - 2uu^t$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_2 u_1 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2u_1^2 = 0 \Leftrightarrow u_1^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2u_1 u_2 = 1 \\ -2u_2 u_1 = 1 \\ 1 - 2u_2^2 = 0 \Leftrightarrow |u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

. Elijo $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = -1/\sqrt{2}$

_ $-2u_1u_2 = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ✓

_ Verifico $\|u\|_2^2 = 1$:

$\|u\|_2^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right)^2 = (\sqrt{1})^2 = 1$ ✓